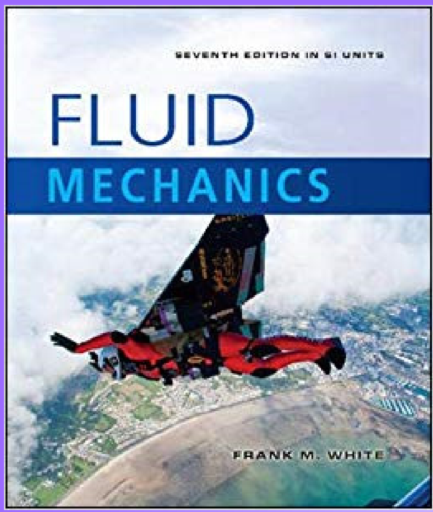



# مکانیک سیالات ۲

**دانشگاه صنعتی شاهرود**
**دانشکده مهندسی مکانیک**

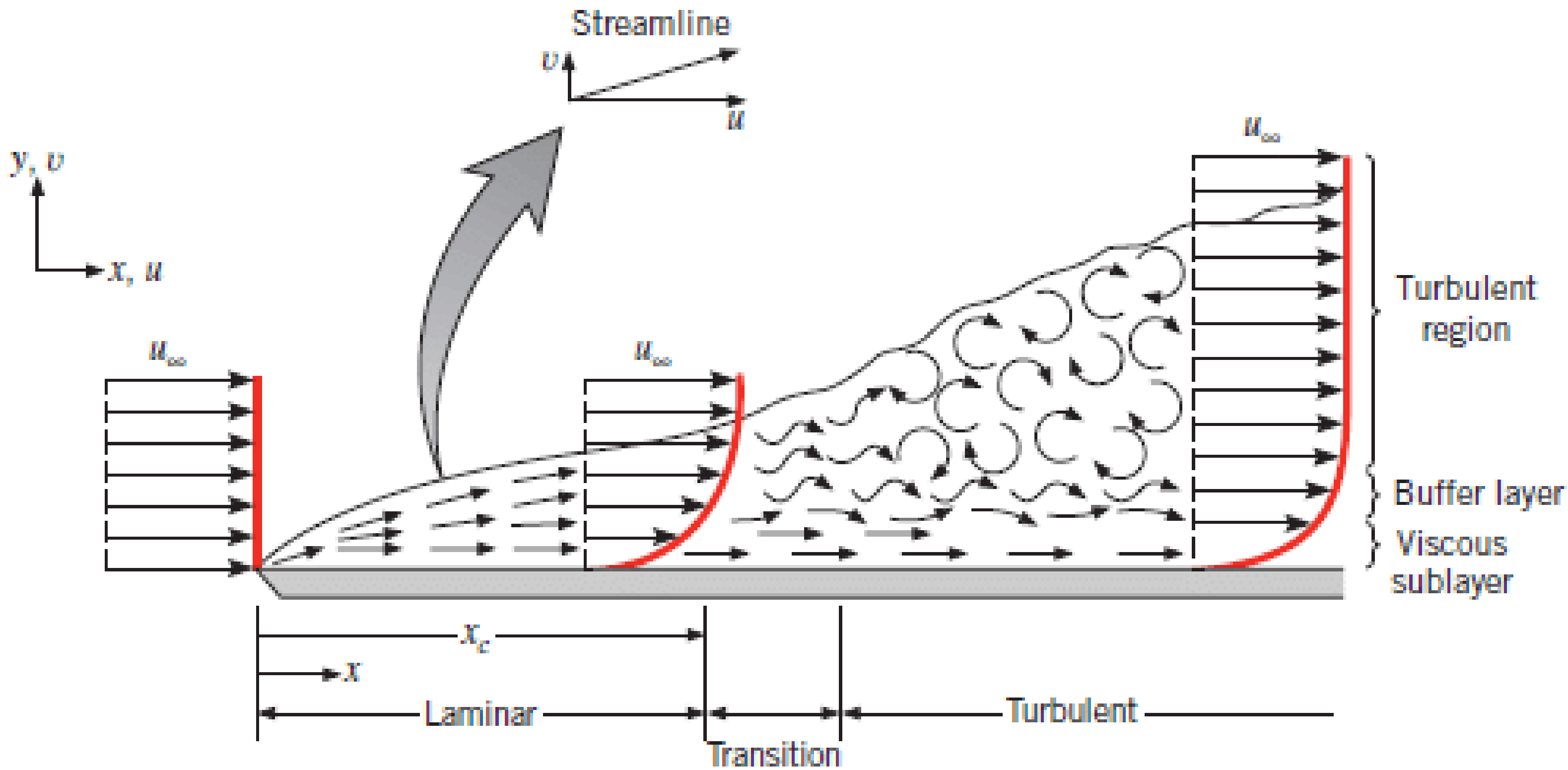
## بخش اول از مباحث فصل هفتم:
## جریان لایه مرزی – مفاهیم پایه و حل تقریبی مساله لایه مرزی

**کلاس درس دکتر نوروزی**
**اردیبهشت ۱۴۰۰**

## تئوری لایه مرزی

تئوری لایه مرزی از مباحث پایه ای و بسیار مهم در مکانیک سیالات محسوب می شود به نحوی که عملا شکل گیری مکانیک سیالات مدرن مدیون این تئوری است. این تئوری در سال ۱۹۰۴ توسط لودویک پرانتل دانشمند آلمانی در کنفرانس بین المللی ریاضیات در هیدلبرگ ارائه شد. مطابق این تئوری، جریان سیال حول سطوح یک جسم به وسیله یک مرز فرضی بنام لایه مرزی به دو بخش تقسیم می شود به نحوی که ذرات سیال داخل آن تحت تاثیر نیروهای ویسکوز قرار دارند و سبب ایجاد نیروی پسا (درگ) بر جسم می شود، حال آنکه ذرات سیال خارج لایه مرزی به اندازه کافی دور از جسم هستند و لذا اثر ویسکوزیته آنها بر نیروی درگ قابل چشم پوشی است.


Ludwig Prandtl




$$\frac{\delta}{x} \approx \begin{cases} \dfrac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} & \text{laminar} \quad 10^3 < \mathrm{Re}_x < 10^6 \\ \dfrac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulent} \quad 10^6 < \mathrm{Re}_x \end{cases}$$

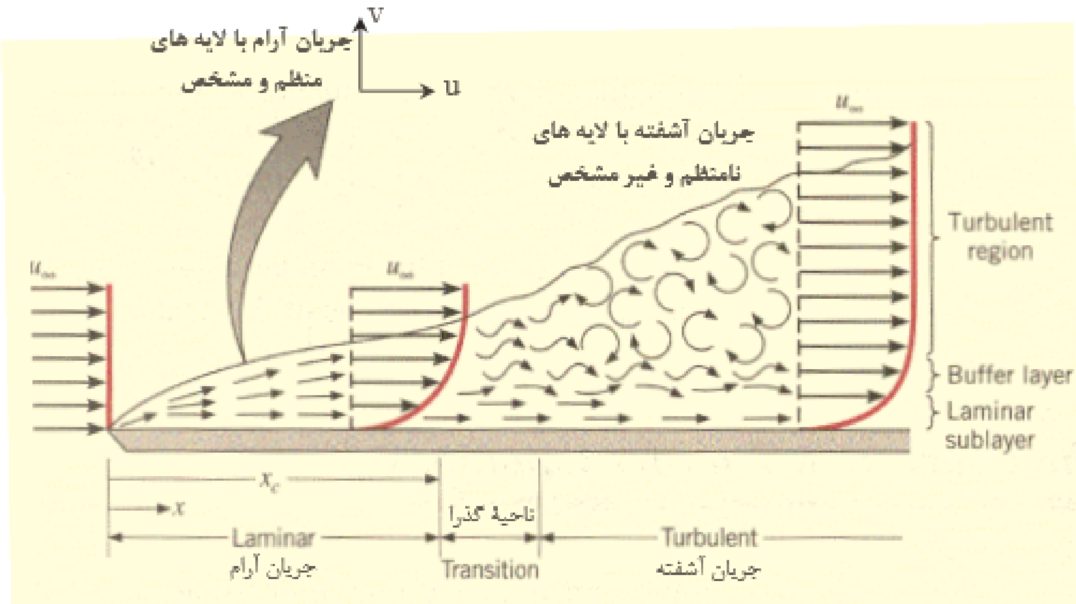
$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{U x}{\nu}$$

# عدد رینولدز معیار اساسی برای توصیف رژیم جریان است.

در اعداد رینولدز به اندازه کافی کوچک جریان آرام یا لایه ای (Laminar Flow) است.


## جریان آرام:

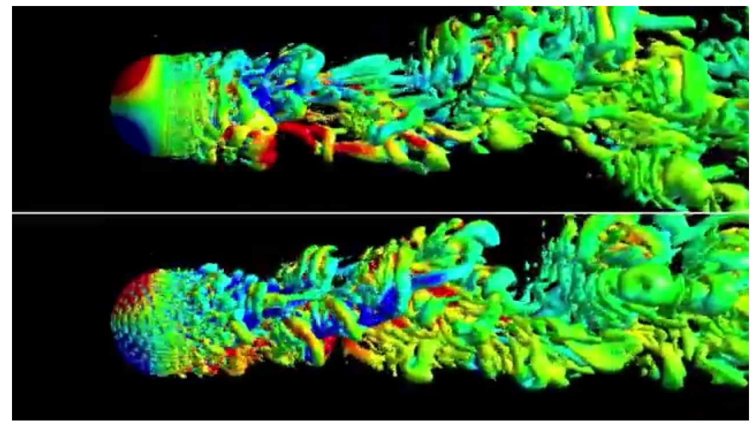
جریان آرام جریانی است که در آن سیال به طریقی منظم و تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت میکند، از همینرو برای توصیف آن از عبارت " طبقه طبقه شده، برگرفته از کلمهٔ Laminate " استفاده شده است. در یک جریان آرام، شکل لایه ها مشخص و با انحناهای ملایم می باشند. در چنین جریانی، مولکولهای سیال با پیشروی در طول مسیر، در داخل لایهٔ اولیهٔ خود باقی خواهند ماند. همچنین در چنین جریانی، مولکولهای نزدیک دیواره، کندترین مولکولها بوده و نزدیکترین دما به دمای دیواره را خواهند داشت.




Velocity boundary layer development on a flat plate.

شکل(۱): رشد لایهٔ مرزی بر روی یک صفحهٔ تخت

در اعداد رینولدز به اندازه کافی بزرگ جریان آشفته یا مغشوش (turbulent Flow) است.



شایان ذکر است که تبدیل جریان از آرام به آشفته بصورت آنی صورت نمی گیرد و محدوده ای بین پایان ناحیه آرام و شروع ناحیه آشفته وجود دارد که به ناحیه انتقال(transition) معروف است.

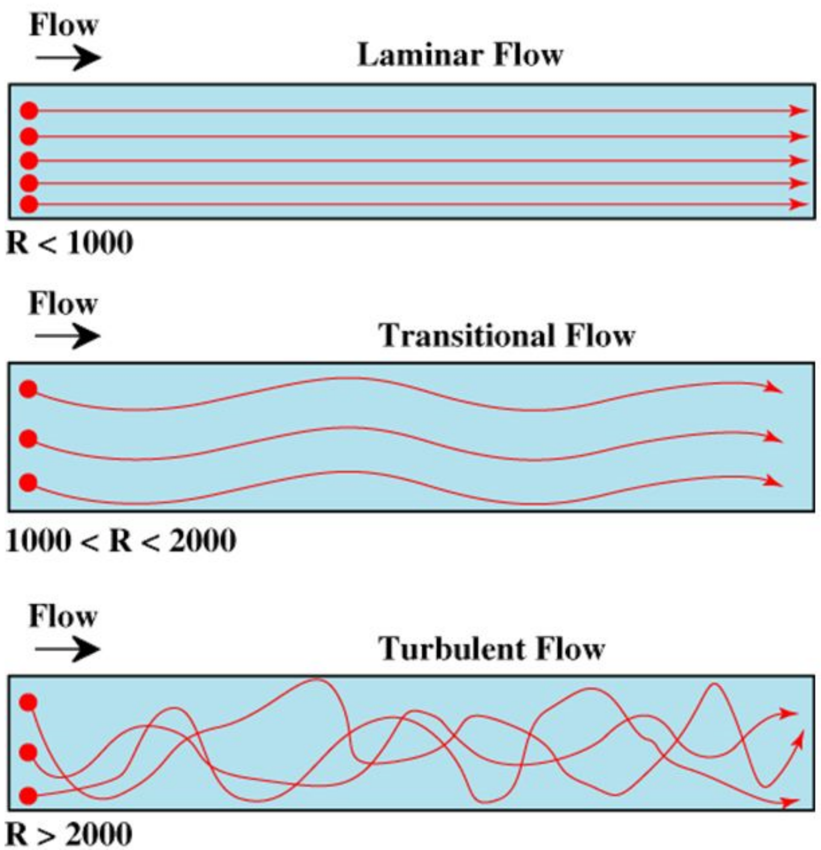
## جریان آشفته:

در شکل مربوط به رشد لایهٔ مرزی بر روی یک صفحهٔ تخت، بخش منتهی الیه سمت راست شکل، توصیف کنندهٔ جریان آشفته است.

همانطور که از نام این جریان مشخص است، این جریان رفتاری بسیار اتفاقی و بی سازمان دارد. در این جریان، به واسطهٔ فرآیندهای اختلاطی شدید، جزء در نواحی بسیار نزدیک به دیواره، شکل لایه های جریان به راحتی قابل تشخیص نبوده و مولکولهای سیال مسیر مشخصی را طی نمی کنند. به عبارت دیگر جریان آشفته نوعی از جریان سیال است که در آن سیال تحت نوسانات جریانی[1] و فرآیندهای اختلاطی شدید قرار میگیرد، این رفتار بر خلاف رفتار جریان آرام است که در آن جریان سیال تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت می نماید. در یک جریان آشفته، اندازهٔ سرعت در هر نقطه دائماً تحت نوسانات و تغییرات، هم در اندازه و هم در راستای حرکتی، قرار می گیرد، به طوریکه تشخیص موقعیت هر ذره در داخل میدان جریان و نیز در هر لحظه مشکل می باشد. همین وضعیت نوسانات دائمی و غیر مشخص در اندازهٔ سرعت را می توان در اندازهٔ فشار، دما و چگالی هر نقطه مشاهده نمود. البته نوسانات اندازهٔ چگالی تنها در جریانهای تراکم پذیر و یا جریانهای درگیر با انتقال حرارت جابجائی آزاد مشاهده می گردد.

# رژیم های مختلف جریان در لوله مستقیم

The value of **R** determined the type of flow in the experimental tubes:

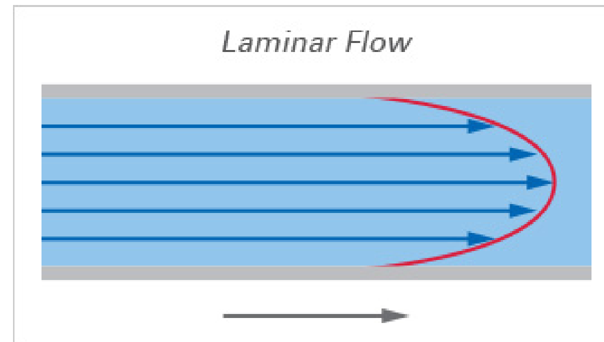


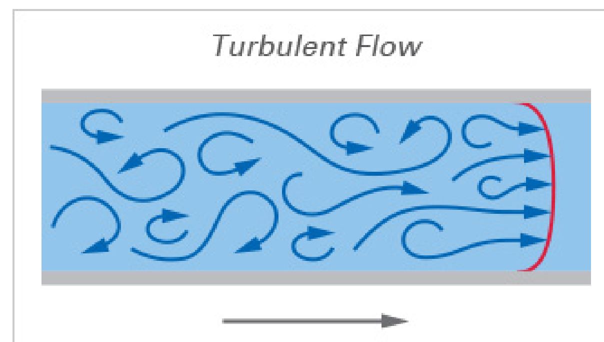

$$\mathbf{R} = \frac{UD}{\nu}$$

< 2100

2100-4000

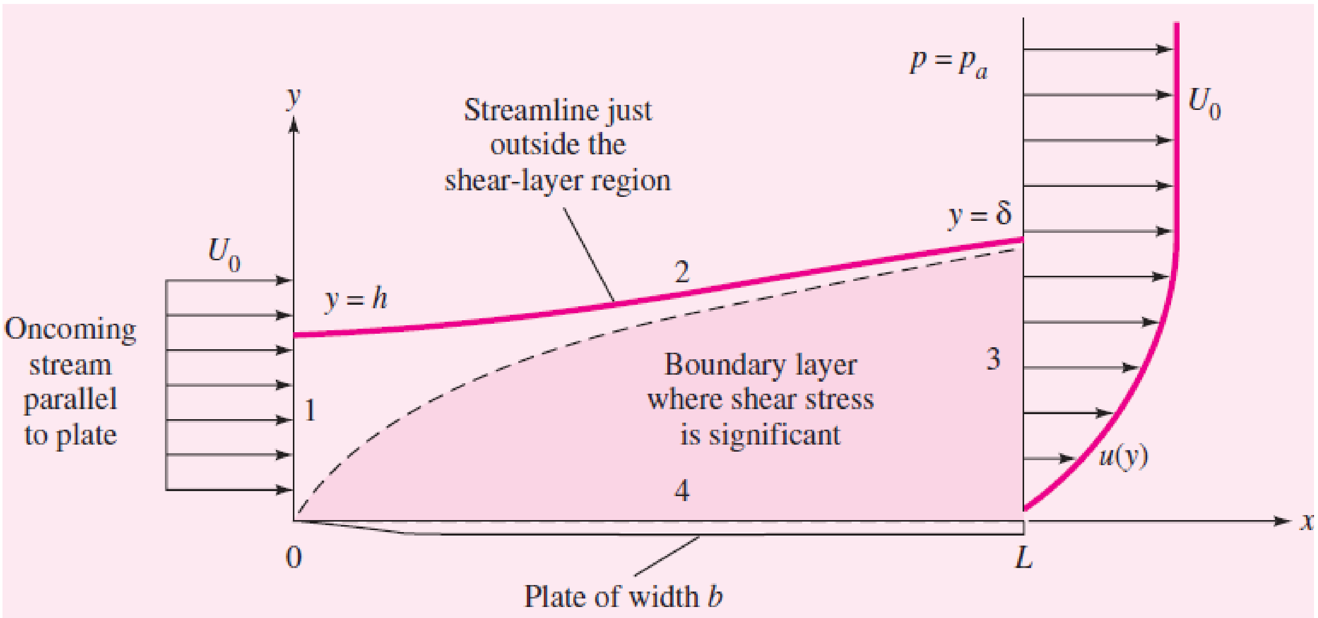
> 4000



### تحلیل مساله لایه مرزی

مطابق شکل زیر، خط جریان گذرا از انتهای لایه مرزی (در $x = L$ و $y = \delta$)، با شماره ۲ نشان داده است. با اندکی دقت می توان دریافت که این خط جریان در ورودی ( $x = 0$ ) باید در ارتفاع $y = h$ قرار داشته باشد که $h < \delta$. بایستی توجه داشت که دبی گذرا از مرزهای ۲ و ۴ صفر است (زیرا مرز ۲ یک خط جریان و مرز ۴ سطح جامد است). بنابراین در حجم کنترل نشان داده شد، جریان فقط از مرز ۱ وارد و از مرز ۳ خارج می شود و لذا دبی ورودی به مرز ۱ باید با دبی خروجی از مرز ۳ برابر باشد. چون مقدار سرعت موضعی در مرز ۱ بیشتر از مرز ۳ است، لذا مقدار $h$ از $\delta$ کمتر است.



**نکته ۱:** با توجه به موارد مطرح شده در اسلاید قبل، لایره مرزی یک خط جریان نیست.

**نکته ۲:** صعودی بودن خط جریان نشان داده در شکل اسلاید قبل معرف آن است که جریان لایه مرزی علاوه بر مولفه سرعت افقی $u$ دارای مولفه سرعت قائم $v$ نیز هست. به عبارت دیگر مساله لایه مرزی یک مساله حداقل دو بعدی است. بنابراین تشکیل لایه مرزی سبب ایجاد دبی (جابجایی جریان) در راستای قائم می شود.

**ضخامت جابجایی** ($\delta^*$): فاصله ای است در ورودی که دبی جریان گذرا از آن برابر با دبی ایجاد شده در راستای قائم در اثر تشکیل لایه مرزی است. بنابراین:

$$\delta^* = \delta - h \qquad (۱)$$

بایستی توجه داشت که دبی در ورودی ۱ با خروجی ۳ برابر است، بنابراین:

$$Uhb = \int_0^{\delta} ubdy \;\; \rightarrow \;\; h = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} dy \qquad (۲)$$

با قرار دادن رابطه (۲) در (۱) داریم:

$$\delta^* = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u}{U} dy \;\; \rightarrow \;\; \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad (۳)$$

**ضخامت مومنتوم** ($\theta$): فاصله ای است در ورودی که مومنتوم گذرا از آن صرف غلبه بر نیروی درگ در اثر تشکیل لایه مرزی می شود:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \quad \& \quad D = \rho U^2 b\theta \tag{۴}$$

**اثبات**: محاسبه نیروی درگ با نوشتن قانون بقای مومنتوم خطی در جهت $x$ برای حجم کنترل امکان پذیر است. از مباحث فصل سوم برای قضیه انتقال رینولدز برای قانون بقای مومنتوم خطی در شرایط جریان دائمی $\frac{d}{dt}=0$ داریم:

$$\sum \mathbf{F} = \int_{CS} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA \tag{۵}$$

در جهت $x$ رابطه (۵) بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum F_x = -D = \int_3 \rho u(L,y)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA + \int_1 \rho u(0,y)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA \tag{۶}$$

بنابراین:

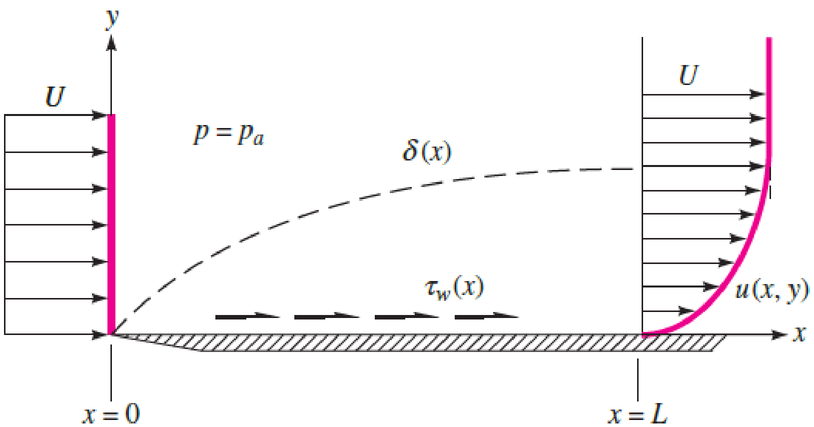
$$-D = \int_3 \rho u^2 dA - \int_1 \rho U^2 dA \;\rightarrow\; D = \rho U^2 bh - \int_0^\delta \rho u^2 b\,dy \tag{۷}$$

**ادامه اثبات:** با قرار دادن مقدار $h$ از رابطه (۲) در رابطه (۷)، رابطه (۴) اثبات می شود:

$$D = \rho U^2 b\int_0^\delta \frac{u}{U}dy - \int_0^\delta \rho u^2 b dy = \rho U^2 b\int_0^\delta \left(\frac{u}{U}\right) - \left(\frac{u}{U}\right)^2 dy$$

$$D = \rho U^2 b\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \rho U^2 b\theta \qquad (۸)$$

**معادله انتگرال کارمن:** معادله انتگرال کارمن رابطه اساسی برای ارائه حلهای تقریبی مساله لایه مرزی است. با توجه به شکل روبرو، می توان نیروی درگ وارد بر طول $x$ از صفحه را بر حسب تنش برشی دیواره بیان کرد:




$$D = \int_0^x \tau_w b dx \;\rightarrow\; \frac{dD}{dx} = \tau_w b \qquad (۹)$$

با قرار دادن رابطه (۸) در (۹)، **فرمول انتگرال کارمن** برای جریان لایه مرزی روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار بدست می آید:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \qquad (۱۰)$$

**ویژگی های پروفیل سرعت لایه مرزی روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار:**

می توان نشان داد که پروفیل لایه مرزی جریان روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار دارای ویژگیهای زیر است:

$$at\ \ y=0 \rightarrow \begin{cases} u=0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & 2 \end{cases} \quad \& \quad at\ \ y=\delta \rightarrow \begin{cases} u=U & 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & 3 \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 & 4 \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 & 5 \\ \vdots \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که مقادیر داخل دارای دایره در رابطه (۱۱)، **درجه اهمیت هر شرط** را نشان می دهد.

جهت در نظر گرفتن یک پروفیل تقریبی برای لایه مرزی، پروفیل مذکور باید هر سه شرط درجه ۱ از نظر اهمیت را ارضا کند. برای پروفیلهای پیچیده تر، پس از شرایط مذکور، ارضای سایر شروط به ترتیب درجه اهمیت، سبب بهبود دقت حل تقریبی لایه مرزی می شود. شروط درجه ۱ از نظر اهمیت، یک شکل تقریبی پایه از لایه مرزی ارائه می کنند. شرط درجه ۲ از نظر اهمیت، مبین صفر بودن گرادیان فشار جریان است و شروط درجه ۳ به بالا از نظر اهمیت، معرف میل کردن سرعت به یک مقدار ثابت بر روی لایه مرزی هستند. این شروط تقریبا بدیهی بوده اما از میان آنها، شرط درجه ۲ از نظر اهمیت، به نظر نیازمند مقداری بحث بیشتر و اثبات است. از معادله مومنتوم در جهت $x$ برای یک جریان دو بعدی دائمی تراکم ناپذیر و با صرفنظر از اثرات گرانش داریم:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (۱۲)$$

از قاعده عدم لغزش، مولفه های سرعت روی دیوار صفر هستند. بنابراین با حرکت در جهت $x$ روی دیوار، تغییرات سرعت نیز و در نتیجه مشتقات مولفه های سرعت نسبت به جهت $x$ صفر خواهند بود. بنابراین با صرفنظر از گرادیان فشار، معادله (۱۲) **روی دیوار** بصورت زیر خواهد بود:

$$\text{at wall } (y=0):\quad \rho\left(\cancel{u}\frac{\cancel{\partial u}}{\partial x}+\cancel{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\cancel{\partial p}}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 \cancel{u}}{\cancel{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\ \rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (۱۳)$$

**مثال:** مساله جریان لایه مرزی آرام بدون گرادیان فشار روی صفحه تخت را با فرض پروفیل سرعت سهموی حل کنید:

$$u(x,y) = Ay^2 + By + C \qquad (۱۴)$$

بایستی توجه داشت که ضرایب $A$، $B$ و $C$ می توانند توابعی از $x$ باشند. رابطه فوق شامل ۳ ضریب مجهول ($A$، $B$ و $C$) است که با توجه به رابطه (۱۱) آنها را می توان با اعمال سه شرط مرزی درجه ۱ از نظر اهمیت بدست آورد:

$$\begin{aligned} &at\ \ y=0:\ \ u=0 \ \rightarrow\ C=0 \\ &at\ \ y=\delta:\ u=U \ \rightarrow\ A\delta^2 + B\delta = U \\ &at\ \ y=\delta: \frac{\partial u}{\partial y}=0 \ \rightarrow\ 2A\delta + B = 0 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

از حل دستگاه معادلات فوق، برای ضرایب داریم:

$$A = -\frac{U}{\delta^2},\ \ B = 2\frac{U}{\delta}\ \ \&\ \ C=0 \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری ضرایب از رابطه (۱۶) در رابطه (۱۴) داریم:

$$u = -\frac{U}{\delta^2}y^2 + 2\frac{U}{\delta}y \quad \rightarrow \quad \frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad (۱۷)$$

بایستی توجه داشت که در رابطه (۱۷)، ضخامت لایه مرزی ( $\delta$ ) تابع $x$ است.

پیشتر گفتیم که رابطه انتگرال کارمن، رابطه اساسی برای حل تقریبی مساله لایه مرزی است. جهت استفاده از این رابطه باید ابتدا مقادیر تنش برشی دیواره و ضخامت مومنتوم محاسبه شوند. برای تنش برشی دیواره داریم:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{at\ y=0} = \mu U \left.\left(\frac{2}{\delta} - \frac{2y}{\delta^2}\right)\right|_{y=0} = \frac{2\mu U}{\delta} \qquad (۱۸)$$

همچنین از رابطه (۴) برای ضخامت مومنتوم داریم:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]\left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy = \frac{2}{15}\delta \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن روابط (۱۸) و (۱۹) در فرمول انتگرال کارمن نتیجه می شود:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{2\mu U}{\delta} = \frac{2}{15}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \qquad (۲۰)$$

با مرتب کردن فرمول (۲۰)، داریم:

$$\delta d\delta = \frac{15\mu}{\rho U} dx \qquad (۲۱)$$

حال می توان از طرفین رابطه (۲۱) انتگرال گرفت. توجه شود که در لبه ابتدایی لایه مرزی ( $x = 0$ )، مقدار ضخامت لایه مرزی ( $\delta = 0$ ) نیز صفر است. پس حد هر دو انتگرال از صفر آغاز می شود.

$$\int_0^{\delta} \delta d\delta = \int_0^{x} \frac{15\mu}{\rho U} dx \rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{15\mu x}{\rho U} \rightarrow \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{30}{\frac{\rho U x}{\mu}} \rightarrow \frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (۲۲)$$

نتیجه رابطه (۲۲) هرچند تقریبی است اما دقت آن نسبتا مناسب است (حل دقیق که به حل بلازیوس معروف است بصورت $\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ می باشد). همچنین نتیجه هر دو حل تقریبی و دقیق، یک پروفیل متناسب با $\sqrt{x}$ را برای ضخامت لایه مرزی پیش بینی می کنند ( $\delta \propto \sqrt{x}$ ). حال می توان سایر پارامترهای لایه مرزی را تعیین کرد. از رابطه (۳) برای ضخامت جابجایی داریم:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy = \frac{\delta}{3} \quad \rightarrow \quad \delta = 3\delta^* \qquad (۲۳)$$

لذا با قرار دادن رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲)، رابطه ضخامت جابجایی بدست می آید:

$$\frac{3\delta^*}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta^*}{x} \approx \frac{1.83}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (۲۴)$$

همچنین با قرار دادن رابطه (۱۹)، در رابطه (۲۲)، رابطه ضخامت مومنتوم استخراج می شود:

$$\frac{7.5\theta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\theta}{x} \approx \frac{0.73}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (۲۵)$$

برای ضریب اصطکاک پوسته ای جریان (که در فصل پنجم تعریف شده)، داریم:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \xrightarrow{\text{From Eq. (18)}} C_f = \frac{\frac{2\mu U}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4\mu}{\rho U\delta} = \frac{4}{\frac{\rho Ux}{\mu}\frac{\delta}{x}} \qquad (۲۶)$$

با قرار دادن تنش برشی از رابطه (۲۲) در رابطه (۲۶) ضریب اصطکاک بدست می آید:

$$C_f = \frac{4}{\mathrm{Re}_x \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \rightarrow C_f = \frac{0.73}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (۲۷)$$

برای ضریب درگ صفحه تخت (که در فصل پنجم تعریف شده) داریم:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho AU^2} \xrightarrow{\text{From Eq. (8)}} C_D = \frac{\rho U^2 b\theta(L)}{\frac{1}{2}\rho bLU^2} = 2\frac{\theta(L)}{L} \qquad (۲۸)$$

با قرار دادن رابطه (۲۵) در رابطه (۲۸)، ضریب درگ صفحه تخت تخمین زده می شود:

$$C_D = 2\frac{\theta(L)}{L} = 2\frac{0.73}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \rightarrow C_D = \frac{1.46}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} = 2C_f(L) \quad \& \quad \mathrm{Re}_L = \frac{\rho UL}{\mu} \qquad (۲۹)$$

در نهایت برای ضریب شکل (shape factor) داریم:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \rightarrow H = 2.51 \qquad (۳۰)$$


THE END